МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
16.04.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.17 Уравнения математической физики

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.04 Прикладная математика

2. Профиль подготовки: Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол №0500-03 от 28.03.24

8. Учебный год: 2026/ 2027 Семестр(ы): 5

9. **Цели и задачи учебной дисциплины**

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории уравнений математической физики;
- выработка навыков решений стандартных краевых задач математической физики;
- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом;
- дать современные теоретические знания в области уравнений математической физики и практические навыки в решении и исследовании основных типов дифференциальных уравнений с частными производными.

Задачи учебной дисциплины:

- сформировать способности применения основных методов исследования решений начальных и начально-краевых задач для уравнений математической физики;
- сформировать способности применения методов математического моделирования при изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: Блок 1; обязательная часть.

Учебная дисциплина «Уравнения математической физики» входит в базовую часть математических и естественнонаучных дисциплин; она непосредственно связана с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Алгебра», «Теоретическая механика», «Физика». Данная дисциплина показывает взаимообусловленность естественнонаучных знаний в современном мире. Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Римана и Лебега.

Знание методов изучения решений начальных и начально-краевых задач для уравнений математической физики является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, уравнения с частными производными и задачи для них являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

Дисциплина является предшествующей для курсов методов вычислений, математического моделирования, концепций современного естествознания, всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: основные положения теории уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Уметь: формулировать постановки основных задач математической физики, знать основные методы построения обобщенных функций; формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач для уравнений с частными производными Владеть: теоретическими подходами к

	практике			созданию математических моделей в области уравнений с частными производными; навыками работы в современных информационных системах.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.	Знать: общие формы закономерности теории уравнений с частными производными и сферы их применения. Уметь: решать начально-краевые задачи для уравнений математической физики, грамотно и правильно представлять свои результаты. Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами, навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знать: методы решения задач в области уравнений с частными производными и особенности их применения. Уметь: работать с различными источниками научной информации, определять оптимальный метод решения задачи для уравнения математической физики. Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными, основными методами научного исследования.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 4 /144.

Форма промежуточной аттестации: Экзамен – 5 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			5 семестр
Контактная работа		68	68
в том числе:	лекции	34	36
	практические	34	36
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-
	контрольные работы	2	2
Самостоятельная работа		40	40
Промежуточная аттестация		36	36
Итого:		144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса,

			ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Основные уравнения в частных производных, их классификация. Корректная постановка задач математической физики.	Основные уравнения математической физики, классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка, постановка начальных, краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных, понятие корректной постановки задач математической физики	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055 - - - - - -
1.2	Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными.	Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонический вид основных уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа. Характеристики. Приведение к каноническому виду уравнений эллиптического и параболического типов	
1.3	Некоторые сведения об основных и обобщенных функциях	Пространства D, D', S, S', регулярные и сингулярные функционалы, производные, прямое произведение, свёртка обобщенных функций, понятие фундаментального решения	
1.4	Уравнения гиперболического типа	Задача Коши для волнового оператора, решение обобщенной задачи Коши для волнового оператора, потенциалы, решение классической задачи Коши для волнового уравнения, формула Кирхгофа, решение задачи Коши о свободных колебаниях струны методом Даламбера, метод Фурье для уравнения колебаний струны	
1.5	Уравнения параболического типа	Фундаментальное решение оператора теплопроводности, задача Коши для уравнения теплопроводности, решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности	
1.6	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции, формулы Грина, функция Грина задачи Дирихле, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре	
1.6	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума и минимума, теорема о среднем.	
2. Практические занятия			**-**
2.1	Основные уравнения в частных производных, их классификация. Корректная постановка задач математической физики.	Основные уравнения математической физики, классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка, определение типа уравнения математической физики второго порядка	- - https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055 - - - -
2.2	Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными.	Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонический вид основных уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа. Характеристики. Приведение к каноническому виду уравнений эллиптического и параболического типов	
2.3	Некоторые сведения об основных и обобщенных функциях	Пространства D, D', S, S', регулярные и сингулярные функционалы, производные, прямое произведение, свёртка обобщенных функций, понятие фундаментального решения	
2.4	Уравнения гиперболического типа	Задача Коши для волнового оператора,	

	типа	решение обобщенной задачи Коши для волнового оператора, потенциалы, решение классической задачи Коши для волнового уравнения, формула Кирхгофа, решение задачи Коши о свободных колебаниях струны методом Даламбера, метод Фурье для уравнения колебаний струны	
2.5	Уравнения параболического типа	Фундаментальное решение оператора теплопроводности, задача Коши для уравнения теплопроводности, решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности	
2.6	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции, формулы Грина, функция Грина задачи Дирихле, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Основные уравнения в частных производных, их классификация. Корректная постановка задач математической физики.	4	2		4	10
2	Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными.	4	4		6	14
3	Некоторые сведения об основных и обобщенных функциях	6	6		4	16
4	Уравнения гиперболического типа	6	8		10	24
5	Уравнения параболического типа	6	8		10	24
6	Уравнения эллиптического типа	8	6		6	20
	Итого:	34	34		40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Уравнения математической физики» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 40 часов. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки написание рефератов.

Примерные темы рефератов: Корректная постановка задач математической физики; Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными; Некоторые сведения об основных и обобщенных функциях; Уравнения гиперболического типа; Уравнения параболического типа; Уравнения эллиптического типа.

Рефераты оцениваются по системе «зачтено» / «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае раскрытия предложенной темы, оценка «не зачтено» ставится в случае, если тема не раскрыта.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. – URL:http://www.kuchp.ru
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2016. – 164 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
4	Карчевский М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: Учебное пособие / М.М. Карчевский, Павлова М. Ф. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 276 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	ЭБС «Лань»
6	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
2	Деревич И.В. Практикум по уравнениям математической физики / И. В. Деревич. – СПб: Издательство «Лань», 2017. – 428 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с. – URL: http://www.kuchp.ru
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с. – URL: http://www.kuchp.ru
5	Рябенко А.С. Методы построения решений краевых задач для эллиптических уравнений / А.С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 45 с. – URL: http://www.kuchp.ru
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с. – URL: http://www.kuchp.ru
7	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с. – URL: http://www.kuchp.ru

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc, Math,* браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Основные уравнения в частных производных, их классификация. Корректная постановка задач математической физики.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену
2.	Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с частными производными.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену
3.	Некоторые сведения об основных и обобщенных функциях	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену
4.	Уравнения гиперболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену
5.	Уравнения параболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену
	Уравнения эллиптического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, контрольные работы, перечень вопросов к экзамену 2
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Примерный перечень тестовых заданий

1. Какое из следующих уравнений является уравнением с частными производными?

а) $y''(x)+y(x)=e^{-x}$. б) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}+u(x,y)=1$. в) $(y(x))^2-e^{y(x)}=\sin x$.

2. Пространством $D(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых функций,

б) финитных функций,

в) бесконечно дифференцируемых и финитных функций.

3. Какое из следующих уравнений является уравнением с частными производными?

а) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\sin x\cdot\sin y$. б) $\sin x\cdot y^{(5)}(x)+y^{(4)}(x)-y(x)=f(x)$. в) $\sin(y(x))=1-x$.

4. Пространством $S(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций,

б) бесконечно дифференцируемых и финитных в $\mathbb{R}^n$ функций,

в) бесконечно дифференцируемых функций которые вместе со всеми своими производными на бесконечности убывают быстрее чем $|x|^{-m}$, где m – произвольное натуральное число.

5. Какой порядок у следующего дифференциального уравнения с частными производными?

$$\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x\partial y^3}+e^{x+y}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=0.$$

а) 1. б) 2. в) 3. г) 4.

6. Пространством $D(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых функций,

б) финитных функций,

в) бесконечно дифференцируемых и финитных функций.

7. Какой порядок у следующего дифференциального уравнения с частными производными?

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+e^{y}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+u(x,y)=\sin(x+y).$$

а) 1. б) 2. в) 3. г) 4.

8. Какие из следующих дифференциальных уравнений с частными производными являются линейными?

а) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+(u(x,y))^2=\cos x$. б) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\cos(x^2+y^2)\cdot u(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

в) $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x\partial y^2}+\cos(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})=0$.

г) $e^{x^2}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2\partial y}+e^{y^2}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+xyu(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$.

9. Канонический вид эллиптических линейных (квазилинейных) дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от двух независимых переменных имеет вид

а) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$, б) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$,

в) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$.

10. Какие из следующих дифференциальных уравнений с частными производными являются не линейными?

а) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} + (u(x,y))^2 = \cos x$.

б) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \cos(x^2 + y^2)\cdot u(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

в) $\dfrac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x \partial y^2} + \cos(\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}) = 0$.

г) $2x\dfrac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x \partial y^2} + \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} + xyu(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

11. Канонический вид гиперболических линейных (квазилинейных) дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от двух независимых переменных имеет вид

а) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$, б) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$,

в) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$.

12. Пусть $L(x,D_x)$ – линейный дифференциальный оператор. Функция $E(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $L(x,D_x)$ если

а) $L(x,D_x)E(x) = 1$, б) $L(x,D_x)E(x) = \delta(x)$, в) $L(x,D_x)E(x) = E(x)$.

13. Канонический вид параболических линейных (квазилинейных) дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от двух независимых переменных имеет вид

а) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$, б) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$,

в) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y})$.

14. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

и величина $D(x,y) = (a_{12}(x,y))^2 - a_{11}(x,y)\cdot a_{22}(x,y)$.

Дифференциальное уравнение будет эллиптическим в точке (x_0,y_0) если

а) $D(x_0,y_0) > 0$, б) $D(x_0,y_0) = 0$, в) $D(x_0,y_0) < 0$.

15. Пусть $L(D_x)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $E(x)$ его фундаментальное решением, тогда решение уравнения $L(D_x)u(x) = f(x)$ задается формулой

а) $E(x)\cdot f(x)$, б) $E(x) * f(x)$, в) $E(x) + f(x)$, г) $E(x) - f(x)$.

16. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

и величина $D(x,y) = (a_{12}(x,y))^2 - a_{11}(x,y)\cdot a_{22}(x,y)$.

Дифференциальное уравнение будет параболическим в точке (x_0, y_0) если

а) $D(x_0, y_0) > 0$, б) $D(x_0, y_0) = 0$, в) $D(x_0, y_0) < 0$.

17. Пусть $x \in \mathbb{R}^3$ и для любой основной функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ $\quad (\delta_{S_R(0)}(x), \varphi(x)) = \int\limits_{S_R(0)} \varphi(x) ds$, где $S_R(0)$ – сфера радиуса R с центром в точке 0, тогда фундаментальным решением волнового оператора будет функция

а) $\dfrac{\delta_{S_R(0)}(x)}{4a^2 t}$, б) $\dfrac{\theta(t)\delta_{S_{at}(0)}(x)}{4\pi a^2 t}$, в) $\dfrac{\theta(t)\delta_{S_R(0)}(x)}{4\pi a^2 t}$.

18. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

и величина $D(x,y) = (a_{12}(x,y))^2 - a_{11}(x,y) \cdot a_{22}(x,y)$.

Дифференциальное уравнение будет гиперболическим в точке (x_0, y_0) если

а) $D(x_0, y_0) > 0$, б) $D(x_0, y_0) = 0$, в) $D(x_0, y_0) < 0$.

19. Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, тогда фундаментальным решением для уравнения Лапласа будет функция

а) $\dfrac{1}{4\pi|x|}$, б) $-\dfrac{1}{4\pi|x|}$, в) $\dfrac{\ln|x|}{2\pi}$ г) $\dfrac{1}{|x|}$.

20. Какое из следующих уравнений является уравнением с частными производными?

а) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \sin x \cdot \sin y$. б) $\sin x \cdot y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) - y(x) = f(x)$. в) $\sin^2(y(x)) = 1 - x$.

21. Какой порядок у следующего дифференциального уравнения с частными производными?

$$-2x\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

а) 1. б) 2. в) 3. г) 4.

22. Пусть $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $F_{x\to\xi}[f(x)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\,dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$. Какие из следующих формул не верны?

а) $F_{x\to\xi}[D^\alpha f(x)] = (-i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}[f(x)]$. б) $D_\xi^\beta F_{x\to\xi}[f(x)] = F_{x\to\xi}[(-ix)^\beta f(x)]$.

в) $F_{x\to\xi}[D^\alpha f(x)] = (i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}[f(x)]$. г) $D_\xi^\beta F_{x\to\xi}[f(x)] = F_{x\to\xi}[(ix)^\beta f(x)]$.

23. Пространством $D'(\mathbb{R}^n)$ называется

а) множество линейных и непрерывных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,

б) множество функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,

в) множество линейных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,

г) множество непрерывных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$.

24. Пространством $S'(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) непрерывных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$,

б) непрерывных и линейных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$,

в) линейных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$.

25. В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x),\ \ x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля:

а) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

26. Функции $\sin\left(\dfrac{\pi(2k+1)x}{2l}\right)$, где $k = 0,1,2,...$ являются собственными функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

а) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

27. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x),\ \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k = 1,2,...$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет

а) удовлетворять только дифференциальному уравнению,

б) удовлетворять только граничным условиям,

в) удовлетворять только начальным условиям,

г) удовлетворять дифференциальному уравнению и граничным условиям,

д) удовлетворять дифференциальному уравнению и начальным условиям,

е) удовлетворять начальным и граничным условиям.

ж) являться решением задачи

28. Функции $\cos\left(\dfrac{\pi k x}{l}\right)$, где $k = 0,1,2,...$ являются собственными функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

а) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

29. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l], \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

Пусть функции $X_k(x)$, где $k = 1,2,...$, являются собственными функциями задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$ сходится и дважды дифференцируем, тогда он всегда будет

а) удовлетворять только дифференциальному уравнению,

б) удовлетворять только граничным условиям,

в) удовлетворять только начальному условию,

г) удовлетворять дифференциальному уравнению и граничным условиям,

д) удовлетворять дифференциальному уравнению и начальному условию,

е) удовлетворять начальному и граничным условиям,

ж) являться решением задачи.

30. В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l], \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля:

а) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

Примерный перечень задач для контрольных работ

1. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

2. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \ x \in [0;l], \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

3. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \cos 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

4. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + x(x-l)t^2, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad \text{где} \quad x \in (0,l), \ t > 0. \end{cases}$$

5. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

6. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \, t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

7. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ x \in [0;l]. \end{cases}$$

8. Определить тип дифференциального уравнения

$$2\sqrt{3}\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x \partial z} + 2\sqrt{3}\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y \partial z} + u(x,y,z) = 0.$$

9. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.$$

10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.$$

11. Определить тип дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} + u(\xi,\eta) = 0.$$

12. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \ (x > 0, y > 0).$$

13. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos y \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \sin y \ u(x,y) = 0.$$

14. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + xt, \ (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x^2,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x.$$

15. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 3t^2, \ (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x.$$

16. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sin x, \ (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

17. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$4\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = e^{2x-x^2}.$$

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если контрольная проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ контрольной содержат два задания. На написание контрольной работы отводится 90 минут. Контрольная работа оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в контрольной работе нужно верно выполнить одно задание. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

20.2. Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к экзамену

1. Дать определение дифференциального уравнения.

2. Дать определение линейного дифференциального уравнения.

3. Дать определение порядка дифференциального уравнения.

4. Записать общий вид квазилинейного дифференциальных уравнений второго порядка от n независимых переменных.

5.* Классификация дифференциальных уравнений второго порядка. Примеры.
6. Определение канонического вида линейных дифференциальных уравнений в частных производных.
7.* Преобразование дифференциального уравнения второго порядка от n независимых переменных при произвольной не особой замене.
8. Для случая двух переменных записать канонический вид гиперболических уравнений.
9. Для случая двух переменных записать канонический вид параболических уравнений.
10. Для случая двух переменных записать канонический вид эллиптических уравнений.
11.* Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа.
12.* Приведение к каноническому виду уравнений эллиптического типа.
13.* Приведение к каноническому виду уравнений параболического типа.
14. Уравнения распространения тепла в изотропном неоднородном теле.
15. Уравнения стационарного распределения тепла в изотропном неоднородном теле.
16. Уравнения колебательных процессов.
17. О корректной постановке задач математической физики.
18. Дать определение пространства $D(\mathbb{R}^n)$. Дать определение сходимости в пространстве $D(\mathbb{R}^n)$.
19.* Доказать, что функция «шапочка» принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^n)$.
20. Дать определение непрерывной операции в $D(\mathbb{R}^n)$.
21. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию в пространства $D(\mathbb{R}^n)$.
22. Линейная неособая в $D(\mathbb{R}^n)$.
23. Операция дифференцирования в пространстве $D(\mathbb{R}^n)$.
24. Дать определение пространства $D'(\mathbb{R}^n)$. Действия над обобщенными функциями. Сходимость в пространстве $D'(\mathbb{R}^n)$.
25. Дать определение регулярной обобщенной функции.
26.* Доказать, что локально интегрируемая функция порождает регулярную обобщенную функцию.
27. Теорема о полноте пространства $D'(\mathbb{R}^n)$.
28. Носитель и нулевое множество обобщенных функций. Дать определение δ – функции Дирака.
29.* Доказать, что δ – функции Дирак принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^n)$. Носитель δ – функции Дирака.
30.* δ – функции Дирака, как предел последовательности основных функций.
31. Сингулярные обобщенные функции. Лемма дю Буа-Реймона.

32.* Сингулярность δ – функции Дирака.

33. Операция дифференцирования в пространстве $D'(\mathbb{R}^n)$.

34. Линейная неособая замена в $D'(\mathbb{R}^n)$.

35. Операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию в пространстве $D'(\mathbb{R}^n)$.

36.* Связь между обобщенной и классической производной.
37. Свойства обобщенных производных.
38.* Доказать формулу Лейбница для обобщенных функций.
39. Определение прямого произведения обобщенных функций.
40. Техническая лемма.

41.* Доказать, что прямое произведение функций из пространств $D'(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^m)$ принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^{n+m})$.

42. Лемма о плотности.
43.* Доказать коммутативность прямого произведения обобщенных функций.
44.* Свойства прямого произведения (с доказательством только умножение на единицу).
45. Определение последовательности сходящейся к единице.
46. Определение свертки обобщенных функций.
47.* Свертка с функцией Дирака.
48.* Свойство свертки обобщенных функций (с доказательством только дифференцируемость свертки).
49. Свертка с финитным функционалом.

50. Пространство $S(\mathbb{R}^n)$ (определение и сходимость).

51. Непрерывные операции в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$.

52. Определение пространства $S'(\mathbb{R}^n)$.

53. Непрерывные операции в пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$.

54*. Теорема Лорана-Шварца.
55*. Пример обобщенной функции медленного роста.
56. Определение обобщенного решения линейного дифференциального уравнения в частных производных.
57. Определение фундаментального решения дифференциального оператора.
58. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.
59. Фундаментальное решение волнового оператора в трехмерном пространстве.
60. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
61*. Основная теорема УЧП.
10. Постановка классической задачи Коши для уравнения теплопроводности.

62*. Сведение классической задачи Коши для уравнения теплопроводности к обобщенной задаче Коши.

63. Решение обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности.

64.* Объемный тепловой потенциал (лемма).

65*. Объемный тепловой потенциал (теорема).

66. Поверхностный тепловой потенциал.

67*. Построение классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (формула Пуассона).

68. Постановка классической задача Коши для волнового уравнения.

69. Сведение классической задачи Коши для волнового уравнения к обобщенной задаче. Решение обобщенной задачи Коши для волнового уравнения.

70. Объемный запаздывающий потенциал.

71. Поверхностный запаздывающий потенциал простого слоя.

72. Поверхностный запаздывающий потенциал двойного слоя.

73*. Решение классической задачи Коши для волнового уравнения. Формула Кирхгофа.

74. Определение гармонической функции.

75. Лемма о гармоничности.

76*. Формулы Грина.

77. Лемма об интегральном представлении дважды непрерывно дифференцируемой функции.

78*. Основные свойства гармонических функций.

79*. Теорема о среднем.

80. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций. Замечание.

81*. Теорема о единственности решения задача Дирихле для уравнения Лапласа.

82. Теорема о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

83*. Теорема о единственности решения и условии разрешимости задача Неймана для уравнения Лапласа.

84*. Теорема о единственности решения и условии разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона.

85. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

86*. Теорема о выражении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа через функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

87*. Теорема о выражении решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона через функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Звездочкой отмечены вопросы с доказательством.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Уравнения математической физики» в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоении учебной дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

В ходе экзамена обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если экзамен проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ экзамена содержат три вопроса. На написание экзамена отводится 150 минут. «Отлично» выставляется при правильном ответе на три вопроса КИМ, «хорошо» выставляется при правильном ответе на два вопроса КИМ, «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе на один вопрос КИМ, «неудовлетворительно» выставляется если обучающийся неверно ответил на все вопросы КИМ.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) Test1-5:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test1

Дельта-функция Дирака – $\delta(x)$ действует на произвольную основную функцию как

Варианты ответов:

1) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0),$

2) $(\delta(x),\varphi(x))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx,$

3) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi'(0).$

Ответ: 1).

Test2

Дельта-функция Дирака является

Варианты ответов:

1) сингулярной обобщенной функцией.
2) регулярной обобщенной функцией,
3) функцией пространства $D(R^n)$

Ответ: 1).

Test3

Пусть $f(x)\in D'\left(R^n\right)$, $g(y)\in D'\left(R^m\right)$ прямым произведение функций $f(x)$, $g(y)$ называется функционал, определенный по формуле

Варианты ответов:

1) $\forall\ \varphi(x,y)\in D\left(R^{n+m}\right)\ \left(f(x)g(y),\varphi(x,y)\right)=\left(f(x),\left(g(y),\varphi(x,y)\right)\right),$

2) $\forall\ \varphi(x,y)\in D\left(R^{n+m}\right)\ \left(f(x)g(y),\varphi(x,y)\right)=\left(f(x),\left(g(y),\varphi(-x,y)\right)\right),$

3) $\forall\ \varphi(x,y)\in D\left(R^{n+m}\right)\ \left(f(x)g(y),\varphi(x,y)\right)=\left(f(x),\left(g(y),\varphi(x,-y)\right)\right).$

Ответ: 1).

Test4

Пусть $f(x)\in D'\left(R^n\right)$, тогда обобщенная производная $D^{\alpha}f(x)$ задается формулой

Варианты ответов:

1) $\forall\ \varphi(x)\in D(R^n)\ \left(D^\alpha f(x),\varphi(x)\right)=\left(f(x),D^\alpha\varphi(x)\right),$

2) $\forall\ \varphi(x)\in D(R^n)\ \left(D^\alpha f(x),\varphi(x)\right)=(-1)^{|\alpha|+1}\left(f(x),D^\alpha\varphi(x)\right),$

3) $\forall\ \varphi(x)\in D(R^n)\ \left(D^\alpha f(x),\varphi(x)\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f(x),D^\alpha\varphi(x)\right),$

Ответ: 3).

Test5

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ \ 0<x<\pi,\ t>0,\\ u(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\ \ 0\le x\le\pi,\\ u(x,0)=\varphi_0(x),\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x),\ t\ge 0.\end{cases}$$

Являются ли собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лувилля

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;\pi),\\ X(0)=0, X'(\pi)=0.\end{cases}$$

функции….

Варианты ответов:

$\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

2. $\sin(2x)$

3. $\cos(9x)$

!Solution

Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;\pi),\\ X(0)=0, X'(\pi)=0.\end{cases}$$

Решения этой задачи: $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x,\ X(0)=0\Leftrightarrow C_1=0,$

$X'(x)=\lambda C_2\cos\lambda x,$

$X'(\pi)=\lambda C_2\cos\lambda\pi=0\Rightarrow\lambda\pi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\Rightarrow\lambda=\frac{2k+1}{2}\Rightarrow$

$X_k(x)=\sin\frac{(2k+1)}{2}x, k=0,1,2,...$ тогда при $k=1\Rightarrow X_1(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

Ответ: $\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

Определите тип для следующего уравнения:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\cos x \frac{\partial\, u}{\partial y} = 0$ - это уравнение ………………. типа

!Solution
Дифференциальное уравнение с частными производными, в случае двух независимых переменных имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial\, u}{\partial y} = 0$ - это уравнение гиперболического типа, так как $D(x,y) = \left(b(x,y)\right)^2 - a(x,y)\cdot c(x,y) = \left(-2\sin x\right)^2 - 1\cdot\left(-4\cos^2 x\right) = 1 > 0$, здесь

$a = 1, b = -2\sin x, c = -4\cos^2 x$

!Ответ
гиперболического
гиперболический

!Task7
Укажите тип для следующего уравнения (введите пропущенное слово):

$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x > 0, y > 0)$ - это уравнение ………… типа

!Solution
Дифференциальное уравнение с частными производными, в случае двух независимых переменных имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x > 0, y > 0)$ - это уравнение эллиптического типа, так как $D(x,y) = \left(b(x,y)\right)^2 - a(x,y)\cdot c(x,y) = 0^2 - xy = -xy > 0$, при $(x > 0, y > 0)$ здесь

$a = x, b = 0, c = y$

!Ответ
эллиптического
эллиптический

!Task8

Укажите тип для следующего уравнения (введите пропущенное слово):

$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6y^2\frac{\partial\, u}{\partial x}+x\frac{\partial\, u}{\partial y}=0$ – это уравнение …………… типа

!Solution

Дифференциальное уравнение с частными производными, в случае двух независимых переменных имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6y^2\frac{\partial\, u}{\partial x}+x\frac{\partial\, u}{\partial y}=0$ - это уравнение параболического типа, так как $D=b^2-ac=\left(-xy\right)^2-y^2x^2=x^2y^2-y^2x^2=0$, здесь $a=y^2, b=-xy, c=x^2$,

!Ответ

параболического

параболическое

!Task9

Пространством $D'(R^n)$ называется множество линейных и ……………….функционалов, заданных над пространством $D(R^n)$,

!Ответ

непрерывных

непрерывные

!Task10

Функции $\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)x$, где $k=1,2,...$ являются …………….

функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$$

!Ответ

собственными

собственные

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).